VISIT…

LANZAROTE

Caliente.com

10. SOLICITĂRI COMPUSE

10.1. Noțiuni introductive

Până acum s-au studiat solicitările simple ale (ER). În practica inginerească sunt frecvente cazurile când sunt prezente simultan două sau mai multe solicitări simple. **Prezența simultană în_secțiunea unui element de rezistență a două sau mai multor eforturi produce o solicitare compusă.**

În cazul solicitărilor compuse fiecare efort va produce în secțiune câte o tensiune, respectiv deformație, mărimi ce se pot calcula cu formulele învațate la solicitările simple. Se pune însă problema însumării acestor tensiuni respectiv deformații şi stabilirii pentru aceste cazuri, a stării limită.

În decursul timpului, rezistența materialelor s-a străduit să dea un răspuns la această întrebare care să poată fi confirmată de practică. Acest răspuns nu este univoc şi aceasta se va vedea în continuare.

10.2. Starea limită

La punctul 1.14, s-a arătat că ipotezele rezistenței materialelor sunt aproximări necesare pentru a putea cuprinde fenomenul fizic complex în relații matematice simple.

De multe ori se depăşeşte limita de proporționalitate, uneori de elasticitate şi chiar, în anumite cazuri, cea de curgere producându-se deformații permanente (neelastice respectiv nereversibile). Se ajunge astfel în situația când se spune despre ER că **nu rezistă**. **Faptul că nu rezistă nu implică nicidecum că ER se rupe ci depăşirea unei stări limită.**

Se spune că **un ER a atins starea limită când acesta nu mai îndeplineşte condițiile tehnice impuse de exploatarea normală, adică funcționarea acestuia devine imposibilă.**

Stările limită se pot clasifica în două grupe:

I **- stări limită de epuizare totală a capacităț**ii **portante,** care se poate caracteriza prin:

a) ruperea ER;

b) atingerea limitei de curgere pe întreaga secțiune a ER şi

c) apariția fenomenului de instabilitate elastică (flambaj).

II - **stări limită de cedare funcțională**, care se caracterizează prin:

a) apariția unor deformații elastice sau neelastice mai mari decât cele permise;

b) apariția unor vibrații inadmisibile.

Buna funcționare a ER este compromisă de existența oricăreia din stările limită de mai sus. Ruperea se produce, în general la materialele fragile şi este cea mai gravă. La materialele ductile se produc mai întâi, deformații plastice mari, ce se pot observa şi se pot lua măsuri de evitarea lor.

La fel de periculoasă este şi instabilitatea elastică a (ER). şi a doua stare limita este inaccesibilă deoarece face imposibilă funcționarea.

10.3. Tensiunea echivalentă

Verdictul dat de ingineri că un ER **nu rezistă**, înseamnă că s-a depăşit o anumită stare limită. În cele ce urmează prin stare limită se va considera atingerea unei caracteristici mecanice sau elastice a materialului până la care se consideră îndeplinite ipotezele de bază ale rezistenței materialelor, respectiv sunt aplicabile relațiile din teoria elasticității. Prin aceasta se restrânge noțiunea de stare limită la domeniul liniar - elastic.

Pentru a se determina starea limită se consideră cinci criterii:

I. - tensiunea normală maximă;

II. - alungirea specifică maximă;

III. - tensiunea tangențială maximă;

IV. - energia specifică totală de deformație maximă;

V. - energia specifică de schimbarea formei maximă.

Aceste cinci criterii s-au impus din două motive:

a) Prin încercări la întindere - compresiune se pot determina valorile caracteristicilor mecanice corespunzătoare stării limită ce nu trebuie depăşite;

b) Între tensiunea limită determinată la întindere sau compresiune (ce nu trebuie depăşită) şi cele cinci criterii, prin care se determină starea limită, se pot stabili relații simple.

Dacă considerăm limita de proportionalitate drept stare limită, celelalte criterii de stare limită se pot scrie funcție de σ_p:

$$\sigma_{max} \le \sigma_p; \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E}; \quad \tau_p = \frac{\sigma_p}{2}; \quad U_{1p} = \frac{\sigma_p^2}{2E}; \quad U_{1fp} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_p^2. \qquad \textbf{(10.1)}$$

Starea spațială de tensiune dintr-un punct al ER poate fi echivalată, prin ipoteză, cu o stare monoaxială de tensiune. Echivalarea se face utilizând un criteriu din cele cinci. Acest lucru poate fi sintetizat prin figura de mai jos:

Dacă se cunoaste starea limită la solicitarea de întindere sau compresiune se pot enunța cele cinci teorii de rezistență clasice prin care se stabilesc condițiile în care se atinge starea limită într-un punct al unui element de rezistență solicitat spațial. Verificarea stării limită se face determinând, pentru o stare de tensiune critică dintr-un punct, pe baza ipotezei de rezistență admisă, a unei tensiuni convenționale, numită **tensiune echivalentă**, care trebuie să satisfacă relația:

$$\sigma_{ech} \le \sigma_L. \qquad \textbf{(10.2)}$$

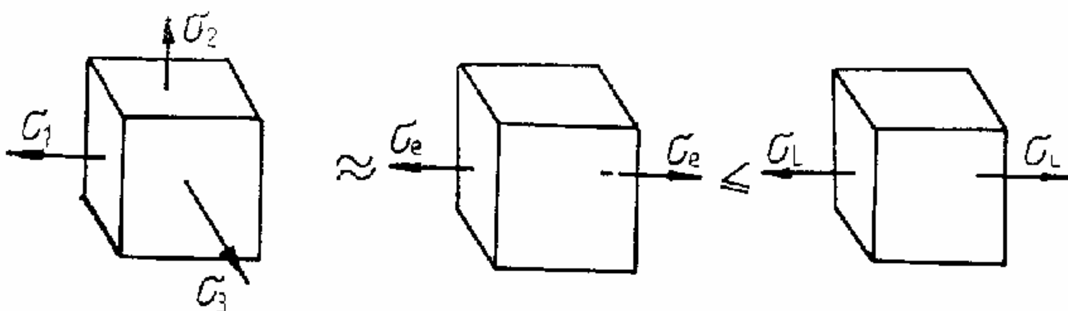


Fig. 10.1

Inegalitatea aceasta poate fi scrisă la limită şi sub forma de egalitate:

$$\sigma_{ech} = \frac{\sigma_L}{c}, \qquad (10.3)$$

unde, c > 1 este coeficientul de siguranță corespunzător.

Întrucât tensiunea echivalentă este funcție de starea de tensiune dinr-un punct al ER, iar starea limită depinde prin coeficientul de siguranță de starea reală de tensiune **(σ_1, σ_2, σ_3)** rezultă că starea limită se poate exprima printr-o functie:

$$S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \qquad (10.4)$$

ce reprezintă o suprafață în sistemul de axe **(σ_1, σ_2, σ_3).** Astfel, starea de tensiune dintr-un punct al ER se poate reprezenta printr-un punct în sistemul **(Oσ_1, σ_2, σ_3)**. Coordonatele punctului sunt, în acest caz tensiunile **σ_1, σ_2** şi **σ_3** adică tensiunile principale din punctul respectiv al ER.

Dacă punctul **P(σ_1, σ_2, σ_3)** se află în interiorul suprafeței (10.4), respectiv starea de tensiune este inferioară stării limită, se spune ca ER "rezistă", iar dacă este situat în exteriorul suprafeței (10.4) este o **stare de tensiune periculoasă (nu rezistă).**

10.4. Teoriile clasice de rezistență

În funcție de cei cinci parametri aleşi pentru atingerea stării limită avem cinci teorii (ipoteze) de rezistență.

10.4.1 Teoria tensiunii normale maxime

Formulată inițial de Galileo Galilei şi reformulată de Rankine.

Se atinge starea limită într-un punct al unui ER atunci când tensiunea normală maximă din acel punct ajunge să fie egală cu tensiunea normală limită de la starea de întindere sau compresiune simplă a materialului ER respectiv.

Această teorie se poate exprima şi prin relațiile:

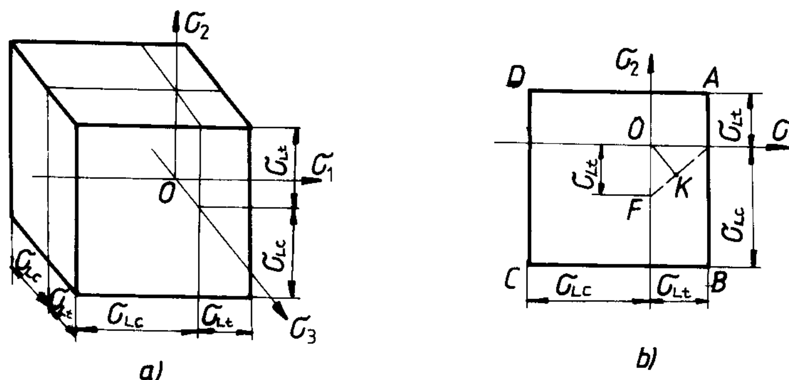


Fig. 10.2

$$-\sigma_{Lc} \le \sigma_1 \le \sigma_{Lt},$$
$$-\sigma_{Lc} \le \sigma_2 \le \sigma_{Lt}, \qquad \textbf{(10.5)}$$
$$-\sigma_{Lc} \le \sigma_3 \le \sigma_{Lt},$$

care se pot reprezenta printr-un cub pentru starea spațială (fig.10.2,a) sau un pătrat pentru starea plană de tensiune (fig.10.2,b).

Dacă $\sigma_{Lt} \neq \sigma_{Lc}$, originea sistemului ale axe nu se află în centrul cubului (respectiv al pătratului).

Această teorie nu corespunde complet realității deoarece pentru starea de compresiune tridimensională ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_L$), pentru care corpul nu poate fi distrus, trebuie să rezulte $\sigma_{Lc} = \infty$.

De asemenea, în cazul forfecării, pentru care tensiunea limită este $\tau_L = \sigma_L / 2$, ce corespunde punctului K, din interiorul pătratului şi nu punctului B, care este limita

conform acestei teorii.

Datorită acestor neconcordanțe, teoria tensiunilor normale maxime poate fi folosită, cu precauție, numai pentru stări de tensiune la care ruperea se face prin smulgere (este o teorie de smulgere).

Pentru starea de tensiune cea mai defavorabilă dintr-un punct al ER, tensiunea echivalentă, conform teoriei tensiunii normale maxime, este:

$$\sigma_{ech} = \max\left\{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \right\} \le \sigma_L . \tag{10.6}$$

10.4.2. Teoria alungirii specifice maxime

Această teorie a fost emisă de Barré de Saint-Venant. Conform acestei teorii se consideră că distrugerea elementului de rezistența este cauzată de lungirile specifice maxime. **Într-un punct al unui ER se atinge starea limită când alungirea specifică maximă ε_{max}, din acel punct, ajunge să fie egală cu valoarea alungirii specifice limită de la întindere sau compresiune simplă.**

$$\varepsilon_{max} \le \varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E},$$

sau exprimând prin tensiuni:

$$-\sigma_{LC} \le \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_{Lt},$$

$$-\sigma_{LC} \le \sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1) \le \sigma_{Lt}, \tag{10.7}$$

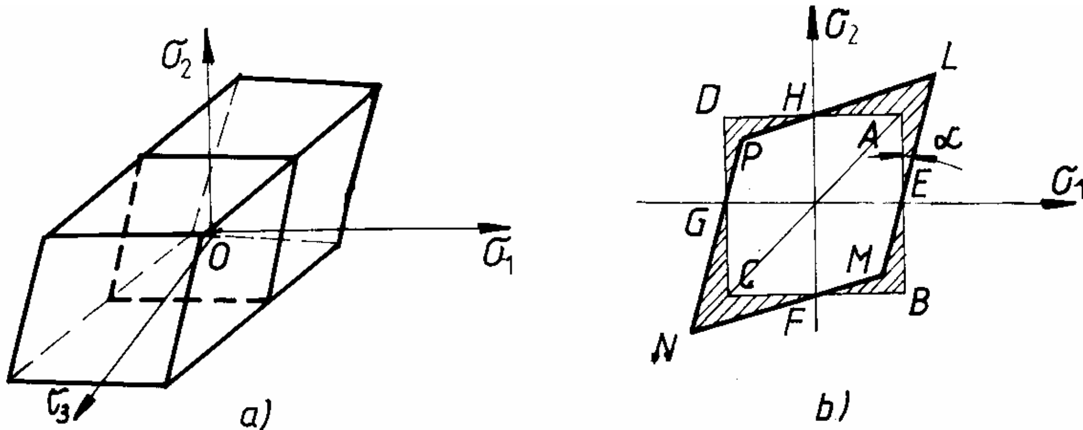


Fig. 10.3

$$-\sigma_{LC} \le \sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_{Lt}.$$

Relațiile (10.7) exprimă suprafața limită care este în acest caz, un paralelipiped înclinat (fig.10.3,a). Pentru starea plană de tensiune se obține rombul din figura (10.3,b), ce rezultă din secționarea paralelipipedului cu planul σ_3= 0.

Unghiul α, cu care sunt înclinate laturile rombului, de la teoria a II-a față de pătratul ce reprezintă prima teorie este dat de relația:

α= arctg(ν)

Această teorie are aproape aceleaşi deficiențe ca şi prima. De aceea se poate aplica, cu bune rezultate la materiale casante, ca o ipoteză de smulgere.

Tensiunea echivalentă, în acest caz pentru starea spațială se exprimă prin relația:

$$\sigma_{ech} = \max\begin{Bmatrix} |\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)| \\ |\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)| \end{Bmatrix} \le \sigma_L \qquad \textbf{(10.8)}$$

10.4.3. Teoria tensiunii tangențiale maxime

A fost formulată de Coulomb şi conform aceste teorii starea limită apare prin lunecări în planul în care acționează tensiunea tangențială maximă. Sub forma actuală a fost reformulată de Tresca. Conform acestei teorii **starea limită într-un punct al unui ER se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă ajunge sa fie egală cu valoarea tensiunii tangențiale (□$_L$) de la solicitarea de întindere sau compresiune simplă.**

Aceasta teorie se poate exprima prin:

$$\tau_{max} \le \frac{\sigma_L}{2},$$

condiție ce este îndeplinită de:

$$-\tau_L \le \tau_1 \le \tau_L;$$

$$-\tau_L \le \tau_2 \le \tau_L;$$

$$-\tau_3 \leq \tau_3 \leq \tau_L .$$

Ținând seama că $\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ şi $\tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ se obține:

$$\begin{aligned} &-\sigma_L \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_L ; \\ &-\sigma_L \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_L ; \\ &-\sigma_L \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_L . \end{aligned} \qquad \textbf{(10.9)}$$

Relațiile (10.9) reprezintă, pentru semnul egal între tensiuni, o prismă hexagonală regulată deschisă la capete. Axa prismei este trisectoarea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ Suprafața rezultă deschisă la ambele capete deoarece atât pentru compresiune triaxială $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_L$ cât şi pentru întindere triaxială $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_L$, tensiunile tangențiale sunt nule (fig.10.4.a) şi nu se produc lunecări.

Conform acestei ipoteze, în aceste cazuri, nu se atinge starea limită şi ER nu este distrus. Concluzia este adevarată numai pentru compresiune uniformă triaxială,

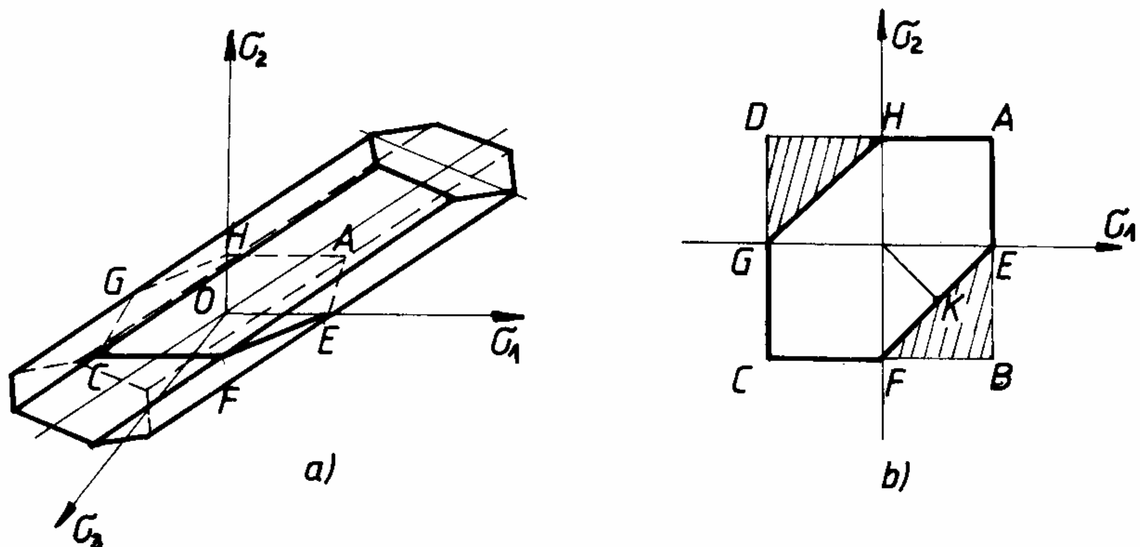


Fig. 10.4

dar nu corespunde cu realitatea pentru întinderea uniformă triaxială.

Starea plană, ce este o secțiune cu planul $\sigma_3 = 0$ (fig. 10.4) este reprezentată printr-un hexagon neregulat AEFCGH (fig.10.4,b) şi corespunde, pentru $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$ cu teoria **I** şi diferă de aceasta pentru $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$. În cazul forfecării pure, când $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max}$, este reprezentată de punctul K de coordonate $\frac{\sigma_L}{2}$ şi $-\frac{\sigma_L}{2}$.

Această teorie a fost verificată experimental şi s-a constatat că ea corespunde cu realitatea cu excepția stării de tensiune apropiată de întindere triaxială, când datorită faptului ca tensiunile tangențiale sunt mici, nu se produc lunecări.

Nici teoria a **- III**-a nu este perfectă pentru că:

a) nu ține seama de influența tensiunii normale în planul de lunecare;

b) nu ține seama de rezistența diferită a materialelor la întindere şi compresiune;

c) neglijează efectul tensiunii intermediare (în calcul se iau numai două tensiuni principale).

Condiția de rezistență pentru această teorie, se exprimă prin relația:

$$\sigma_{ech} = \max\{(\sigma_1 - \sigma_2); (\sigma_1 - \sigma_3); (\sigma_2 - \sigma_3)\} \le \sigma_L .$$

Dacă se ține seama că $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, condiția de rezistență devine:

$$\sigma_{ech} = |\sigma_1 - \sigma_3| \le \sigma_L , \qquad \textbf{(10.10)}$$

şi deci este independentă de valoarea tensiunii normale intermediare σ_2.

10.4.4. Teoria energiei totale de deformație

Aceasta teorie a fost formulată de Haigh şi se enunță astfel: **într-un punct al unui ER se atinge starea limită atunci când energia de deformație specifică ajunge sa fie egală cu valoarea energiei de deformație specifică corespunzatoare solicitării de întindere sau compresiune simplă,** adică:

$$U_1 \le U_{1L} .$$

Exprimând aceste energii de deformație, în functie de tensiuni, se obține inegalitatea:

$$\frac{1}{2E}\cdot(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\cdot\nu\cdot(\sigma_1\cdot\sigma_2+\sigma_2\cdot\sigma_3+\sigma_3\cdot\sigma_1)\le\frac{\sigma_L^2}{2E},$$

sau simplificând prin **(2E)** rezultă:

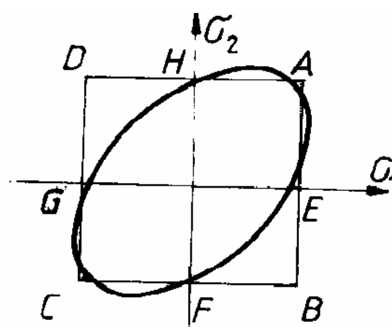


Fig. 10.5

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\cdot\nu\cdot(\sigma_1\cdot\sigma_2+\sigma_2\cdot\sigma_3+\sigma_3\cdot\sigma_1)$$

, **(10.11)**

relație ce exprimă un elipsoid.

Pentru starea plană de tensiune se reprezintă printr-o elipsă ce trece prin punctele EFGH (fig.10.5). Această teorie de rezistență este de smulgere. Este utilizată numai pentru stări de tensiune apropiate de starea triaxială de întindere: ($\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}>0$).

Tensiunea echivalentă, în acest caz, se exprimă cu relația:

$$\sigma_{ech}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\cdot\nu\cdot(\sigma_1\cdot\sigma_2+\sigma_2\cdot\sigma_3+\sigma_3\cdot\sigma_1)}\le\sigma_L. \qquad \textbf{(10.12)}$$

10.4.5. Teoria energiei specifice de variație a formei

A fost formulată de catre Huber - Hencky - Mises şi ia în considerare numai energia specifică de variație a formei.

Conform acestei teorii, **într-un punct al unui ER se atinge starea limită când energia de deformație specifică de schimbare a formei, din acel punct, ajunge sa fie egală cu energia specifică de schimbare a formei corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere sau compresiune simplă.**

$$U_{1f}\le U_{1fL},$$

sau, exprimând în funcție de tensiuni se obține:

$$\frac{1+\nu}{6E}\cdot\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]\le\frac{1+\nu}{3E}\cdot\sigma_L^2,$$

iar după simplificări se obține:

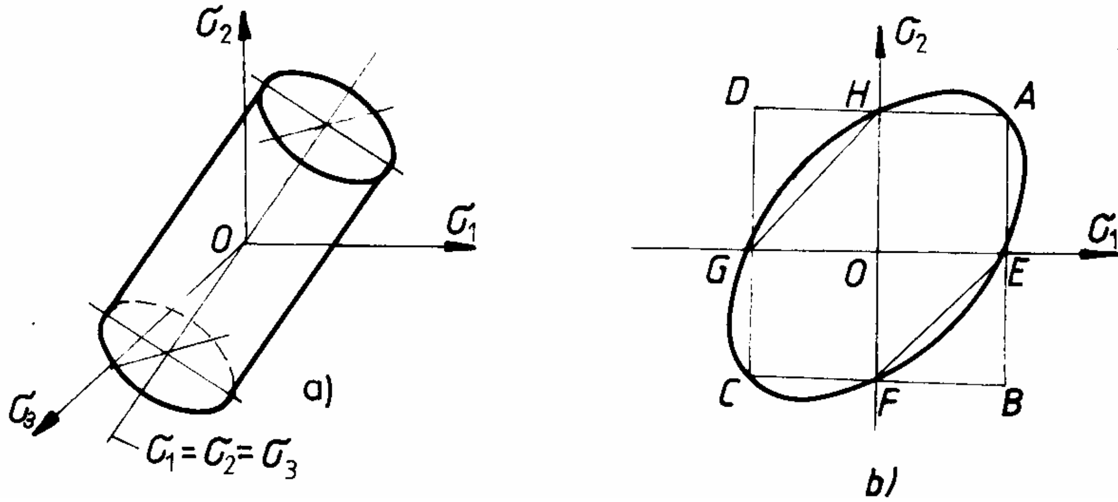


Fig. 10.6

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\cdot\sigma_2-\sigma_2\cdot\sigma_3-\sigma_3\cdot\sigma_1\le\sigma_L^2. \qquad \textbf{(10.13)}$$

Relația (10.15) reprezintă un cilindru deschis la ambele capete, având ca axă bisectoarea $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ (fig.10.6,a)

Secțiunea normală la axa cilindrului este un cerc, iar secțiunea făcută cu planul σ_3**=0**, corespunzătoare stării plane de tensiune, este o elipsă circumscrisă hexagonului neregulat de la teoria a III-a, fig. 10.6b.

Tensiunea echivalentă în acest caz se exprimă cu formula:

$$\sigma_{ech}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\cdot\sigma_2-\sigma_2\cdot\sigma_3-\sigma_3\cdot\sigma_1)}\le\sigma_L. \qquad \textbf{(10.14)}$$

Această teorie este apropiată de realitate cu excepția stării triaxiale uniforme de întindere. Este superioară teoriei a III-a deoarece ține seama şi de tensiunea intermediară.

10.5. Particularizări ale teoriilor de rezistență

10.5.1. Starea plană de tensiune

Înlocuind în relațiile de mai sus $\sigma_3 = 0$ rezultă starea plană de tensiune caracterizată numai prin tensiunile principale σ_1 și σ_2.

Relațiile pentru tensiunile echivalente devin:

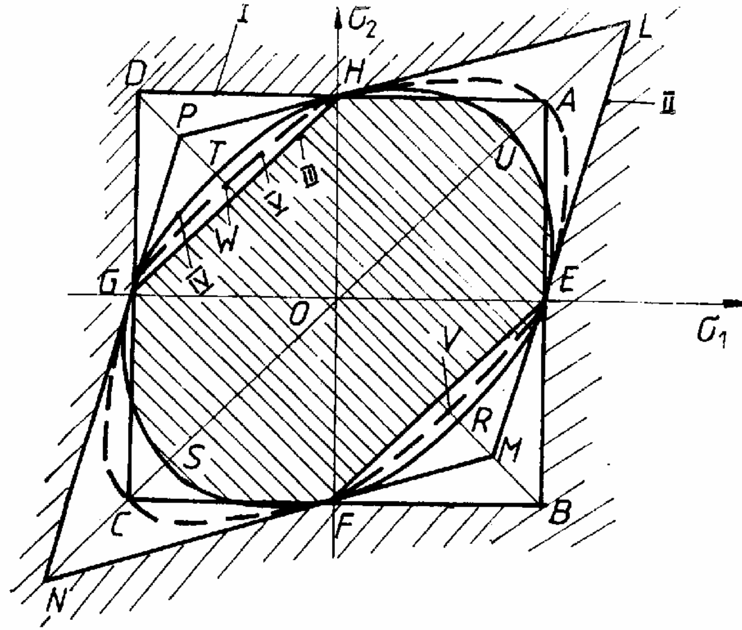


Fig. 10.7

I) $\sigma_{ech} = \max\left\{|\sigma_1|;\ |\sigma_2|\right\} \le \sigma_L$;

II) $\sigma_{ech} = \max\left\{|\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2|;\ |\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1|\right\} \le \sigma_L$;

III) $\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_L$;

IV) $\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \le \sigma_L$;

V) $\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \le \sigma_L$. **(10.15)**

În figura 10.7 s-au reprezentat prin aceste relații :

- pătratul ABCD - conform teoriei **I**;
- rombul LMNP - conform teoriei a - **II**-a;

- hexagonul neregulat AEFCGHA - conform teoriei a - **III** -a;

- elipsa ERFSGTHUE - conform teoriei a - **IV** -a;

- elipsa EVFCGWHAE - conform teoriei a -**V**-a.

Din această figură se observă că în punctele de pe axe, adică la întindere sau compresiune simplă toate ipotezele de rezistență coincid. Suprafața haşurată interioară reprezintă stările plane σ_1, σ_2 care nu depăşesc starea limită după toate ipotezele, iar suprafața haşurată exterioară reprezintă stările de tensiune care, după toate ipotezele, conduc la depăşirea stării limită. Suprafața nehaşurată reprezintă zona în dispută între diferitele teorii de rezistență.

10.5.2. Aplicarea teoriilor de rezistență la bare

În cazul particular al barelor, în secțiunile cărora pot exista numai tensiuni normale $\sigma = \sigma_x$ şi tangențiale $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$, tensiunile principale se obțin cu relația:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2},$$

care înlocuite în relațiile (10.17), pentru ν= **0,3** dau formulele:

$$\textbf{I)}\ \sigma_{ech} = 0{,}5 \cdot (|\sigma| + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}) \le \sigma_L :$$

$$\textbf{II)}\ \sigma_{ech} = (\frac{1-\nu}{2} \cdot |\sigma| + \frac{1+\nu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = 0{,}35 \cdot |\sigma| + 0{,}65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_L ;$$

$$\textbf{III)}\quad \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_L ;$$

$$\textbf{IV)}\quad \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\nu) \cdot \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6 \cdot \tau^2} \le \sigma_L ;$$

$$\textbf{V)}\quad \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \le \sigma_L . \qquad \textbf{(10.16)}$$

10.5.3. Aplicarea teoriilor de rezistență la starea de forfecare pură

Pentru starea de forfecare pură, când $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ înlocuind în relațiile (10.17) şi luând ν= **0,3** acestea devin:

I. $\sigma_{ech} = \tau \leq \tau_L$, deci $\tau_L = \sigma_L$;

II. $\sigma_{ech} = (1+\nu)\cdot\tau_L$, deci $\tau_L = \dfrac{\sigma_L}{1+\nu} = 0{,}7692\cdot\sigma_L$;

III. $\sigma_{ech} = 2\cdot\tau \leq \sigma_L$, deci $\tau_L = 0{,}5\cdot\sigma_L$;

IV. $\sigma_{ech} = \tau\cdot\sqrt{2(1+\nu)} \leq \sigma_L$, deci $\tau_L = \dfrac{\sigma_L}{2(1+\nu)} = 0{,}62\cdot\sigma_L$;

V. $\sigma_{ech} = \sqrt{3}\cdot\sigma_L$, deci $\tau_L = \dfrac{\sigma_L}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\cdot\sigma_L$. **(10.17)**

Admițând că legea lui Hooke poate fi extinsă până la limita de curgere, se poate exprima limita de curgere la torsiune în funcție de limita de curgere la tracțiune sau compresiune, conform teoriilor de rezistența, astfel:

I) $\tau_c = \sigma_c$,

II) $\tau_c = 0{,}7692\cdot\sigma_c$,

III) $\tau_c = 0{,}5\cdot\sigma_c$,

IV) $\tau_c = 0{,}62\cdot\sigma_c$,

V) $\sigma_c = 0{,}5774\cdot\sigma_c$. **(10.18)**

10.6 Criterii de alegere a teoriilor de rezistență

În general pentru materialele tenace se folosesc teoriile de rupere prin lunecare, adică teoria **V** sau **III**, iar pentru materialele casante se utilizează teoriile de rupere prin smulgere, respectiv teoria **II** sau teoria **I**. Ordinea indicată a teoriilor este de preferat.

Experimental s-a constat că modul de rupere depinde în mare măsură de starea de tensiune la care este supus ER. Din aceste considerente se recomandă alegerea teoriei de rezistență în funcție de semnul tensiunii medii:

$\sigma_m = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ şi anume:

a) pentru $\sigma_m < 0$, se alege o teorie de rupere prin lunecare, adică teoria **V** sau teoria **III**;

b) pentru $\sigma_m > 0$, se alege o teorie de rupere prin smulgere, adică teoria **II** sau teoria **I**.

De asemenea, pentru alegerea teoriilor de rezistență se poate utiliza **criteriul lui Davidenko - Fridmann**. Conform acestui criteriu se defineşte **starea mecanică de solicitare** prin raportul:

$$\mathbf{m} = \frac{\sigma_{ech}(III)}{\sigma_{ech}(II)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]}, \qquad \mathbf{(10.19)}$$

raport ce reprezintă panta unei drepte ce trece prin origine într-un sistem de axe **Oστ**. Diagrama din figura 10.8, se obține pentru orice material pentru care s-a determinat experimental σ_L şi τ_L.

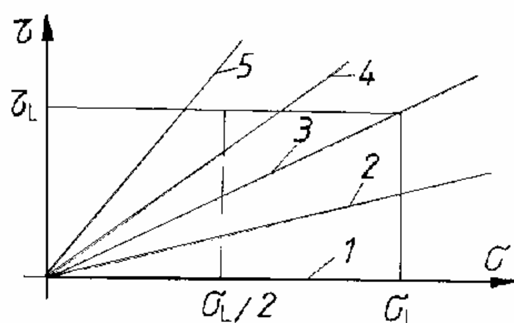


Fig. 10.8

Dreptele de pantă **m** prezentate în figură, pentru diferite valori ale stării mecanice de solicitare, sunt:

- dreapta - 1, cu panta **m=0**, ce se obține pentru $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$, reprezintă întindere uniformă după trei axe;

- dreapta - 2, cu panta **0 : m : 0,5** o solicitare dată de $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ (întindere după 3 direcții);

- dreapta - 3, cu panta **m = 0,5** o solicitare de întindere simplă $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

- dreapta - 4, cu panta **m = 0,7692** o solicitare de forfecare pură: $\sigma_2 = 0;$ $\sigma_3 = 0;$

- dreapta - 5, cu panta **m = 1,67**, o solicitare de compresiune simplă, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 < 0$.

Pentru a alege teoria de rezistență ce trebuie utilizată, după acest criteriu, se calculează panta dreptei cu relația (10.19) şi se trasează dreapta respectivă pe fig.10.11, apoi se procedează astfel:

a) dacă dreapta trasată taie întâi verticala $\sigma = \sigma_L$, înseamnă că ruperea se va produce prin smulgere, se impune să se aleagă o teorie de smulgere (teoria II sau I);

b) dacă dreapta trasată taie întâi orizontala $\tau = \tau_L$, atunci ruperea se va produce prin lunecare şi se impune să se aleaga o teorie de rupere prin lunecare (t. V sau III).

10.7 Calculul de rezistență al barelor supuse la solicitări compuse

Prin solicitare compusă se înțelege acțiunea simultană asupra barei a două sau mai multe eforturi, cazuri ce se întâlnesc frecvent în aplicațiile inginereşti. Dar fiecare efort produce câte o tensiune, unele tensiuni normale, altele tangențiale. Datorită acestui fapt, solicitările compuse se pot studia având în vedere tensiunile ce le produc.

După tipul de tensiune produsă, eforturile ce produc solicitarea compusă se grupează în urmatoarele trei grupe:

a) **N** şi **M** (**M_y** şi **M_z**) ce produc tensiuni normale;

b) **T** (**T_y** şi **T_z**) şi **M_t** ce produc tensiuni tangențiale;

c) **N** şi **T** sau **N** şi **M_t**, **M** şi **M_t**, **M** şi **M_t**, **N**, **M**, **M_t**, ce produc atât tensiuni normale cât şi tangențiale.

În cazurile **a** şi **b** când tensiunile au aceeaşi direcție acestea se însumeaza algebric, iar când au direcții diferite se însumează geometric.

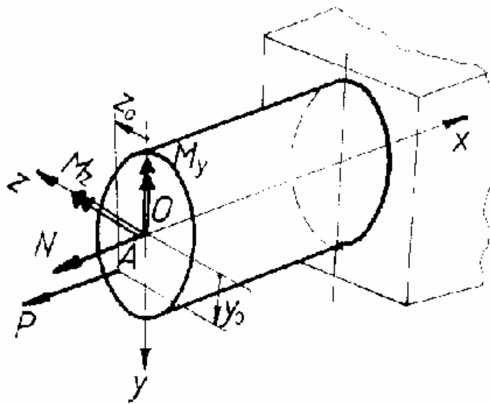


Fig. 10.9

În cazul **c**, cele două tipuri de tensiuni σ şi τ nu se însumează algebric şi nici geometric ci numai folosind una din teoriile de rezistenţă (cea corespunzatoare).

După forma secţiunii grupa **c** de solicitare compusă se subdivizează, pentru analiză în două subgrupe:

- bare de secţiune circulară sau inelară şi
- bare de secţiune oarecare.

10.7.1. Întindere sau compresiune excentrică

Solicitarea de întindere sau compresiune excentrică se produce în barele încărcate cu o forţă paralelă cu axa bazei (cazul a).

Considerăm o bară, încarcată în punctul A, de coordonate $\mathbf{y_o}$ şi $\mathbf{z_0}$ cu forţa P, paralelă cu axa barei (fig.10.9). Reducând forţa P în centrul de greutate al secţiunii se obţin eforturile:

- forţa axială,

$$\mathbf{N = P},$$

-momentul încovoietor, având componentele:

$$\mathbf{M_z = P \cdot y_0} \text{ şi } \mathbf{M_y = -P \cdot z_0},$$

unde, $\mathbf{y_0}$ şi $\mathbf{z_0}$ sunt coordonatele punctului de aplicare al forţei P.

Aceste eforturi produc, într-un punct oarecare, de coordonate y şi z a secţiunii, tensiunile:

$$\sigma_t = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}, \quad \sigma_i' = \frac{\mathbf{M_z}}{\mathbf{I_z}} \cdot \mathbf{y} \text{ şi } \sigma_i'' = -\frac{\mathbf{M_y}}{\mathbf{I_y}} \cdot \mathbf{z}.$$

Aceste tensiuni având aceeaşi direcţie, paralelă cu axa barei se vor însuma algebric:

$$\sigma = \sigma_t + \sigma' + \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z .$$

Înlocuind valorile eforturilor, tensiunea totală este:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{P \cdot y_0 \cdot y}{I_z} + \frac{P \cdot z_0 \cdot z}{I_y} = \frac{N}{A} \cdot (1 + \frac{A \cdot y_0}{I_z} \cdot y + \frac{A \cdot z_0}{I_y} \cdot z) .$$

|inând seama că $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ şi $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, reprezintă razele de inerție, tensiunea într-un punct al secțiunii se obține din relația:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot (1 + \frac{y \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_0}{i_y^2}) . \qquad \textbf{(10.20)}$$

Axa neutră ce corespunde punctelor pentru care $\sigma = 0$, se obține prin anularea parantezei, adică din ecuația:

$$1 + \frac{y \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_0}{i_y^2} = 0 , \qquad \textbf{(10.21)}$$

ce reprezintă ecuația unei drepte având tăieturile pe axele Oy şi Oz:

$$y_M = -\frac{i_z^2}{y_0},\ z_M = 0,\ \ y_N = 0,\ \ z_N = -\frac{i_z^2}{z_0} . \qquad \textbf{(10.22)}$$

Din relațiile (10.24) rezultă că tăieturile axei neutre pe axele de inerție principale au semne contrare coordonatelor punctului de aplicație al forței. Înseamna că axa neutră va trece prin cadranul opus cadranului în care se află punctul de aplicație al forței.

Aplicația 10.1 Să se determine sarcina capabilă să o suporte stâlpul din figura 10.10 confecționat dintr-un profil I30, din OL 37 cu σ_a=150 MPa. Să se traseze diagrama de variație a tensiunilor pe secțiune.

Rezolvare: Mărimile geometrice pentru profilul I30 (vezi anexa 9) sunt $A = 69,1 cm^2$, $i_z = 11,9$ cm, $i_y = 2,56$ cm, şi b = 125 mm.

Coordonatele punctului de aplicare a forţei, faţă de sistemul de axe ales sunt $y_0 = -140$ mm şi $z_0 = -60$mm. Punctul cel mai solicitat (tensiune maximă în valoare absolută), este punctul 1 (cel mai depărtat punct din cadranul forţei), de coordonate $y_1 = -150$mm şi $z_1 = -62,5$ mm.

Din relaţia (10.22) scrisă pentru punctul 1 se obţine:

$$P_{cap} = \frac{\sigma_a \cdot A}{1 + \frac{y_1 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_1 \cdot z_0}{i_y^2}} = \frac{150 \cdot 69,1 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{1 + \frac{150 \cdot 40}{119^2} + \frac{62,5 \cdot 60}{25,6}} = 126,3 \ \text{kN}$$

Adopt: $P_{cap} = 125$ kN.

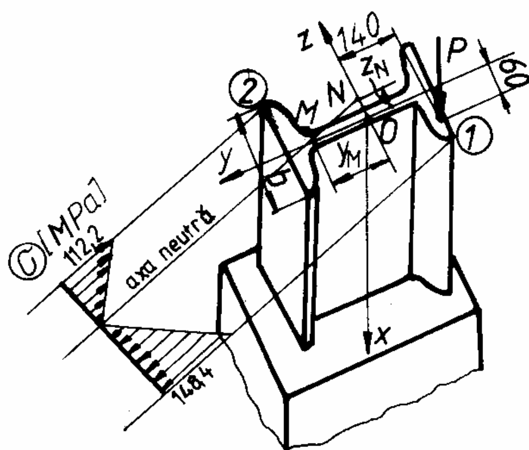


Fig. 10.10

Intersecţia axei neutre cu axele de coordonate sunt :

$$y_M = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{119^2}{-150} = 94,4 \ \text{mm},$$

$$z_M = 0;$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{25,6^2}{-60} = 10,9 \ \text{mm},$$

$$y_N = 0.$$

Tensiunile extreme pentru punctele 1 şi 2 rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_1 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_1 \cdot z_0}{i_y^2}\right) = \frac{-125 \cdot 10^3}{69,1 \cdot 10^2} \cdot \left(1 + \frac{150 \cdot 140}{119^2} + \frac{62,5 \cdot 60}{25,6^2}\right) = -148,4 \ \text{MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_2 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_2 \cdot z_0}{i_y^2}\right) = \frac{-125 \cdot 10^3}{69,1 \cdot 10^2} \cdot \left(1 - \frac{150 \cdot 140}{119^2} - \frac{62,5 \cdot 60}{25,6^2}\right) = 112,2 \ \text{MPa}.$$

Poziţia axei neutre şi variaţia tensiunilor este dată în fig. 10.10.

10.7.2. Calculul de rezistență al arborilor de secțiune circulară şi inelară solicitați la încovoiere şi răsucire

Dintre ER solicitate compus în care se produc atât tensiuni normale cât şi tangențiale o frecvență deosebit de mare în aplicațiile inginereşti o au arborii, osiile motoare, şuruburile, etc.

Arborii sunt organe de maşini care transmit prin intermediul roților dințate, a roților de curea sau a cuplajelor, momente de torsiune şi sunt solicitați la încovoiere simplă. Calculul de rezistență al arborilor se face ținând seama numai de momentele de încovoiere şi de torsiune, neglijând efectul forței tăietoare. Datorită acestor momente tensiunile normale şi tangențiale maxime ce se produc în secțiunile transversale periculoase se determină în relațiile:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} \quad \text{şi} \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}.$$

Având în vedere că la o secțiune circulară sau inelară, $W_z = 2W_p$, tensiunile maxime, exprimate numai în funcție de modulul de rezistență axial, sunt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} \quad \text{şi} \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{2W_z}.$$

Deoarece, atât la încovoiere cât şi la torsiune aceste tensiuni sunt maxime în cele mai depărtate puncte față de axa neutră (Oz în fig. 10.11), pentru aceste puncte se calculează tensiunea echivalentă. Utilizând teoria III de rezistență (III, 10.16) se obține:

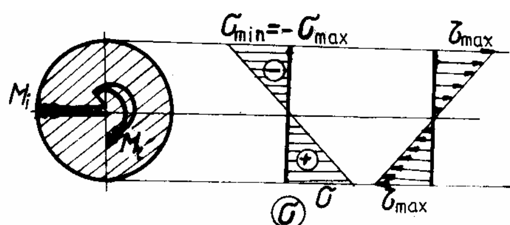


Fig. 10.11.

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2} = \sqrt{\frac{M^2}{W_z^2} + 4\frac{M_t^2}{(2W_z)^2}} = \sqrt{\frac{M^2 +}{W}}$$

.

În care, în cazul teoriei III, s-a notat cu:

$$\mathbf{M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}},$$

mărime ce se numeşte **moment încovoietor echivalent.**

Momentul echivalent este un moment de încovoiere convențional, calculat cu ajutorul unei teorii de rezistență prin care se echivalează o solicitare compusă de încovoiere şi torsiune, numai pentru arborii de secțiune circulară sau inelară, cu o solicitare de încovoiere.

Procedând în mod analog cu toate relațiile (10.16) rezultă urmatoarele expresii pentru momentul încovoietor echivalent:

$$\mathbf{I)} \quad \mathbf{M_{ech} == 0{,}5 \cdot (M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2})},$$

$$\mathbf{II)} \quad \mathbf{M_{ech} = 0{,}35 \cdot M_i + 0{,}65 \cdot \sqrt{M_i + M_t^2}},$$

$$\mathbf{III)} \quad \mathbf{M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}},$$

$$\mathbf{IV)} \quad \mathbf{M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}65 \cdot M_t^2}},$$

$$\mathbf{V)} \quad \mathbf{M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2}}. \qquad \mathbf{(10.23)}$$

Utilizând relațiile (10.23) se obține valoarea momentului încovoietor echivalent. Acesta **se utilizează în calculul de rezistență ca şi cum arborele ar fi solicitat numai la încovoiere de către un moment având valoarea lui M_{ech}.**

Astfel, **calculul de rezistență la arbori de secțiune circulară şi inelară** solicitați de M_i şi M_t va fi analog cu cel prezentat la încovoiere şi anume:

a) **problemele de verificare:**

$$\sigma_{ech} = \frac{\mathbf{M_{ech}}}{\mathbf{W_z}} \le \sigma_a, \qquad \mathbf{(10.24)}$$

b) **problemele de capacitate de încărcare:**

$$\mathbf{M_{echcap} = \sigma_a \cdot W_z}, \qquad \mathbf{(10.25)}$$

c) **problemele de dimensionare:**

$$\mathbf{d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{\pi \cdot \sigma_a}}} \quad \text{sau} \quad \mathbf{D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{(1-k^4)\cdot \pi \cdot \sigma_a}}}. \qquad \mathbf{(10.26)}$$

În cazul arborilor, tensiunea admisibilă se ia mai mică şi anume $\sigma_a = \sigma_{a\,III}$, deoarece s-a neglijat efectul forţei taietoare şi faptul că arborele este solicitat şi la oboseală.

Aplicaţia 10.2 Să se dimensioneze arborele din figura (10.12,a), confecţionat din OL 50 cu σ_a = 80 MPa ştiind că are secţiune inelară cu d = 0,8 D.

Rezolvare: Forţele P şi Q de la periferia celor două roţi se reduc în centrele roţilor respective, rezultând schema de încărcare din figura (10.12,b), prin care arborele este solicitat de forţele P şi Q la încovoiere (se neglijează solicitarea de forfecare) şi de momentele M_t, $M_{t3} = P \cdot R_1$ şi $M_{t4} = Q \cdot R_2$ la torsiune.

Din ecuaţia de echilibru $M_{tx} = 0$ se determină sarcina Q:

$$Q = \frac{P \cdot R_1 - M_t}{R_2} = \frac{20 \cdot 0{,}2 - 2{,}4}{0{,}4} = 4 \ \text{kN}.$$

Momentele de torsiune sunt:

$M_{t1-3} = -M_t = -2{,}4 \ \text{kNm}$,

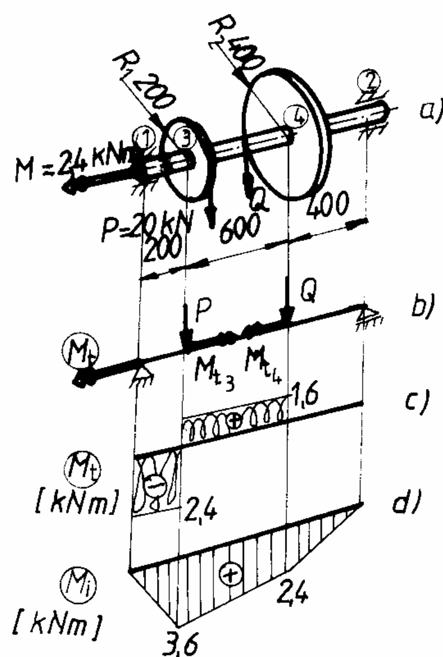


Fig. 10.12

$M_{t3-4} = -M_t + P \cdot R_1 = -2{,}4 + 20 \cdot 0{,}2 = 1{,}6 \ \text{kNm}$,

$M_{t4-2} = 0$,

iar diagrama momentelor de torsiune este reprezentată în figura (10.12,c).

Reacţiunile din lagăre sunt:

$$V_1 = \frac{20 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}4}{1{,}2} = 18 \ \text{kN} \text{ şi}$$

$$V_2 = \frac{20 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8}{1{,}2} = 6 \ \text{kN},$$

iar momentele de încovoiere:

$M_3 = V_1 \cdot 0{,}2 = 18 \cdot 0{,}2 = 3{,}6 \ \text{kNm}$ şi

$$M_4 = V_2 \cdot 0{,}4 = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4 \ \text{kNm}.$$

Diagrama momentelor de încovoiere este reprezentată în figura (10.12,d).

Secțiunea periculoasă, unde se face calculul de rezistență este secțiunea (3) unde M_i şi M_t au valori maxime (în valoare absolută) şi pentru această secțiune momentul echivalent este:

$$M_{ech\,V} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 0{,}75 \cdot 2{,}4^2} = 4{,}157 \ \text{kNm}.$$

Diametrul necesar determinat de relația 10.26, pentru secțiune inelară este:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{\pi \cdot \sigma_a \cdot (1-k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4{,}157 \div 10^6}{\pi \cdot 80 \cdot (1-0{,}8^4)}} = 96{,}42 \ \text{mm}.$$

Se adoptă: D = 95 mm şi d = 76 mm.

Deoarece s-a adoptat o valoare inferioară celei calculate se va face obligatoriu verificarea pentru a se vedea dacă nu s-a depăşit cu mai mult de 5% · σ_a.

$$\sigma_{max} = \frac{32 \cdot M_{ech}}{\pi \cdot D_{efc}^3 \cdot \left(1-k^4\right)} = \frac{32 \cdot 4{,}157 \cdot 10^6}{\pi \cdot 95^3 \cdot \left(1-0{,}8^4\right)} = 83{,}65 \ \text{MPa} < 1{,}05 \cdot \sigma_a = 84 \ \text{MPa}.$$

10.7.3. Calculul de rezistență al barelor de secțiune oarecare supuse unor solicitări compuse

Eforturile ce produc tensiuni normale într-o secțiune a barei sunt forța axiala şi momentul încovoietor. Tensiunile normale au direcția axei astfel că se pot însuma algebric în orice punct al secțiunii. Valorile acestor tensiuni într-un punct oarecare al secțiunii pot fi calculate cu una din relațiile:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \ \sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \ \sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \ \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_t} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z. \quad (10.27)$$

Tensiunile normale maxime, ce se produc în secțiunea periculoasă şi în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră se calculează cu una din relațiile:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A},\ \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z},\ \sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},\ \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad \textbf{(10.28)}$$

Tensiunea tangențială produsă de momentul de răsucire se calculează cu una din relațiile:

$$\tau_t = \frac{M_t}{k \cdot h \cdot b^2},\quad \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot t},\quad \tau_t = \frac{M_t}{I_{td}} \cdot t, \qquad \textbf{(10.29)}$$

în funcție de forma secțiunii barei, dreptunghiulară, profil subțire închis sau deschis, sau:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t},$$

de la generalizarea relațiilor de calcul la răsucire (vezi § 8.9).

În toate aceste cazuri trebuie avut în vedere că aceste tensiuni sunt maxime pe conturul exterior al secțiunii şi au direcția tangentă la contur.

Forța tăietoare produce tensiuni tangențiale ce se calculează cu formulele lui Juravski:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \quad \text{şi} \quad \tau_{xz} = \frac{T \cdot S_z^{'}}{t \cdot I_z}. \qquad \textbf{(10.30)}$$

Tensiunile tangențiale dintr-un punct oarecare al secțiunii dacă au direcții diferite se vor însuma geometric cu relația:

$$\tau = \sqrt{\tau_t^2 + \tau_f^2 + 2 \cdot \tau_t \cdot \tau_f \cdot \cos\alpha}, \qquad \textbf{(10.31)}$$

unde α este unghiul format de cele două tensiuni.

Întrucât tensiunile tangențiale maxime τ_{xy} şi τ_t sunt pe conturul exterior, unde iau valori maxime şi sunt tangente la contur, pentru toate punctele de pe contur unghiul α poate fi 0^o sau 180^o. **Astfel că pe conturul secțiunii tensiunile tangențiale se însumează algebric.** În general însumarea se face în punctele secțiunii în care cele două tensiuni sunt maxime şi au acelaşi sens ($\alpha = 0^o$):

$$\tau_{max} = \tau_{t_{max}} + \tau_{xy} = \frac{M_t}{W_t} + \frac{T \cdot S_0}{b \cdot I_z} \qquad \textbf{(10.32)}$$

Pentru barele lungi, tensiunile tangențiale produse de forța tăietoare au valori mici, în comparație cu τ_t şi ca atare nu se va lua în considerare efectul forței taietoare ci numai cel al momentului de răsucire, astfel că:

$$\tau_{max} \cong \tau_{t max} = \frac{M_t}{W_t}. \qquad (10.33)$$

Ordinea operațiilor în calculul de rezistență al barelor de secțiune oarecare este urmatoarea:

a) Se trasează diagramele de eforturi, se evidențiază secțiunile periculoase (unde eforturile sunt maxime) şi se notează valorile eforturilor din fiecare secțiune periculoasă. În cazul calculului de capacitate de încărcare este bine ca în loc de valori să se scrie expresiile literare ale eforturilor.

b) Se efectuează calculul de rezistență cerut de problema respectivă şi anume:

- **calculul de verificare al barei:** constă în calcularea şi trasarea diagramei de variație a tensiunilor pentru fiecare efort din secțiunea periculoasă. Pentru punctele secțiunii cu tensiuni maxime se calculează tensiunile echivalente ce se compară cu tensiunea admisibilă;

- **sarcina capabilă:** În acest caz trebuie ca eforturile şi tensiunile sa fie exprimate în funcție de sarcina P, necunoscută, apoi din condiția $\sigma_{max} \le \sigma_a$ se determină sarcina capabilă P. Acest calcul este posibil numai dacă expresiile eforturilor pot fi exprimate în funcție de un singur parametru şi anume forța P.

Dimensionarea barei solicitate compus este de fapt o predimensionare unde se consideră:

$$\sigma_{ap} = (0,5\ldots0,9) \cdot \sigma_a , \qquad (10.34)$$

şi se calculează dimensiunile secțiunii ținând seama numai de efortul preponderent. Se adoptă dimensiunile şi apoi se face verificarea luând în considerare tensiunile produse de toate solicitările din secțiunea periculoasă.

Aplicația 10.3 Să se verifice bara din figura 10.13 ştiind că este confecționată din OL 70 cu σ_a=180 MPa.

Rezolvare: Diagramele de eforturi sunt reprezentate sub bară şi se observă că secțiunea periculoasă este secțiunea din încastrare (secțiunea B.)

Mărimile geometrice necesare sunt:

$$I_z = (I_{zoi} + y_{0i}^2 \cdot A_i) = \frac{6 \cdot 9{,}6^3 - 5{,}4 \cdot 8^3}{12} = 212\,cm^4,$$

$$S_1 = S_4 = 0,$$

$$S_2 = S_3 = 6 \cdot 0{,}8 \cdot 4{,}4 = 21{,}12 \ \ cm^3,$$

$$S_G = S_2 + 4 \cdot 0{,}6 \cdot 2 = 25{,}92 \ \ cm^3,$$

$$S_z^{'} = 2{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 4{,}4 = 9{,}504 \ cm^3,$$

$$I_t = \frac{1}{3}\sum b \ \ t^3 = \frac{1}{3}(2 \cdot 6 \cdot 0{,}8^3 + 8 \cdot 0{,}6^3) = 2{,}624 \ \ cm^4,$$

$$W_{td} = \frac{I_t}{t_{max}} = \frac{2{,}624}{0{,}8} = 3{,}28 \ \ cm^3,$$

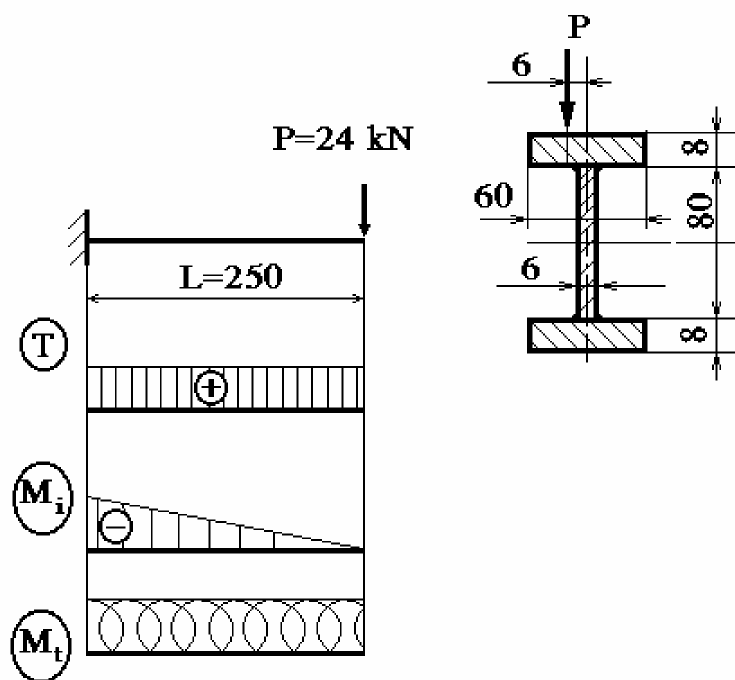


Fig. 10.13

$$W_{tdi} = \frac{I_t}{t_i} = \frac{2,624}{0,6} = 4,373\ cm^3.$$

Tensiunile corespunzatoare solicitărilor din secțiunea periculoasă sunt:

- la încovoiere:

$$\sigma_1 = -\sigma_4 = \frac{M_i \cdot y_i}{I_z} = \frac{-6 \cdot 10^6 \cdot (-48)}{212 \cdot 10^4} = 135,9\ \text{MPa},$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{M_i \cdot y_3}{I_t} = \frac{-6 \cdot 10^6 \cdot (-40)}{212 \cdot 10^4} = 113,2\ \text{MPa},$$

- la forfecare:

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy4} = 0$$

$$\tau_{xy2t} = \tau_{xy3t} = \frac{T \cdot S_2}{b_{2t} \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{60 \cdot 212 \cdot 10^4} = 3,985\ \text{MPa},$$

$$\tau_{xy2i} = \tau_{xy3i} = \frac{T \cdot S_2}{b_{2i} I_z} = \frac{24x10^3 x21,12x10^3}{6x212x10^4} = 39,85\text{MPa},$$

$$\tau_G = \frac{T \cdot S_G}{b_G \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 25,92 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 48,91\ \text{MPa},$$

$$\tau_{xz\max} = \frac{T \cdot S_z'}{t \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 9,504 \cdot 10^3}{8 \cdot 212 \cdot 10^4} = 13,45\ \text{MPa},$$

- la rasucire:

$$\tau_{t\max} = \frac{M_t}{W_{td}} = \frac{0,144 \cdot 10^6}{3,28 \cdot 10^3} = 43,9\ \text{MPa},$$

$$\tau_{ti} = \frac{M_t}{W_{tdi}} = \frac{0,144 \cdot 10^6}{4,373 \cdot 10^3} = 32,93\ \text{MPa}.$$

Diagramele de variație a tensiunilor, pe secțiunea periculoasă sunt reprezentate în figura 10.14.

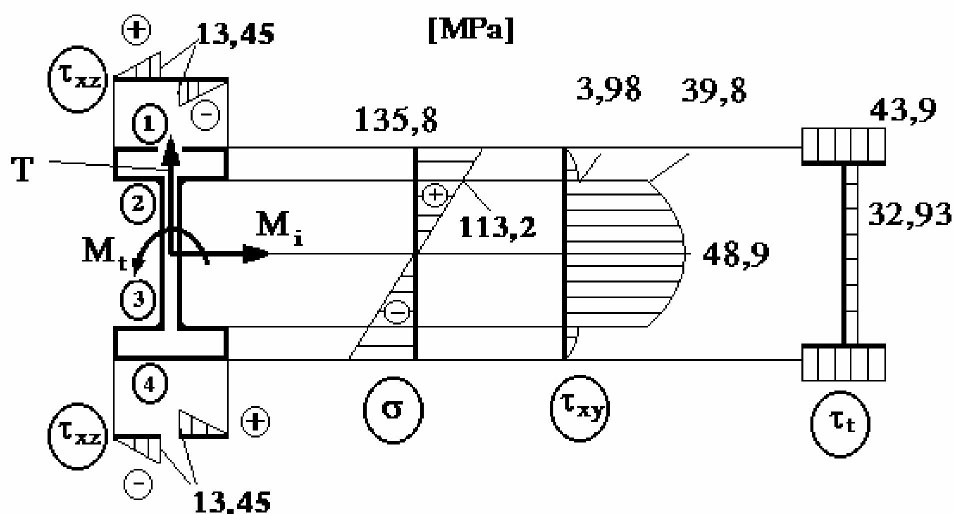


Fig. 10.14

Calculând tensiunile echivalente cu una din teoriile de rezistență (teoria a V-a) şi comparând cu rezistența admisibilă se obțin:

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_{ech_4} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{135,9^2 + 3 \cdot 43,9^2} = 155,7 \ \text{MPa} < \sigma_a,$$

$$\sigma_{ech_{2t}} = \sigma_{ech_{3t}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_{2t}^2} = \sqrt{113,2^2 + 3 \cdot (43,9 + 13,45 + 3,985)^2} = 150,8 \ \text{MPa} < \sigma_a$$

$$\sigma_{ech_{2i}} = \sigma_{ech_{3i}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_{2i}^2} = \sqrt{113,2^2 + 3 \cdot (39,85 + 32,93)^2} = 169,4 \text{MPa} < \sigma_a$$

$$\sigma_{echG} = \sqrt{3} \cdot \tau_G = \sqrt{3} \cdot (48,91 + 32,93) = 141,8 \ \text{MPa} < \sigma_a$$

Bara rezistă.

Aplicația 10.4 Să se determine momentele capabile să le suporte secțiunea periculoasă a barei din figura 10.15, dacă $M_t = 2 \cdot M_i$ şi σ_a = 150 MPa.

Rezolvare: Mărimile geometrice necesare sunt:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{20 \cdot 15^3 - 19,4 \cdot 14,4^3}{12 \cdot 7,5} = 106,4 \ \text{cm}^3,$$

$$W_t = 2 \cdot \Omega \cdot t_{min} = 2 \cdot 19{,}7 \cdot 14{,}7 \cdot 0{,}3 = 173{,}8 \ \ cm^3 .$$

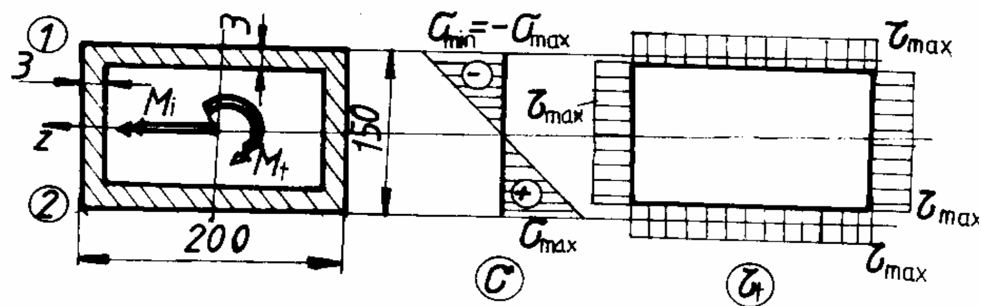


Fig. 10.15

Deoarece cele mai solicitate puncte ale secțiunii sunt cele de pe liniile 1 şi 2 (vezi diagramele tensiunilor) sarcinile capabile se vor determina cu ajutorul unei teorii de rezistență (teoria III în acest caz) scrisă pentru acestea:

$$\sigma_{ech_1} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} = M_i \cdot \sqrt{\frac{1}{W_z^2} + \frac{16}{W_t^2}}$$

din care se obține,

$$M_{i,cap} = \frac{\sigma_a \cdot W_z \cdot W_t}{\sqrt{W_t^2 + 16 \cdot W_z^2}} = \frac{150 \cdot 106{,}4 \cdot 173{,}8}{10^3 \cdot \sqrt{173{,}8^2 + 16 \cdot 106{,}4^2}} = 6{,}033 \ \ kNm .$$

Se adoptă: $M_{i\,cap}$ = 6 kNm şi $M_{t\,cap}$= 12 kNm.